DOI:10.15924/j.cnki.1009-5128.2013.09.005

2013 年 9 月　　渭南师范学院学报　　Sept. 2013
第 28 卷 第 9 期　　Journal of Weinan Normal University　　Vol. 28　No. 9

关于 Smarandache LCM 对偶函数方程的可解性

赵娜娜，陈　斌

（西北大学 数学系，西安 710127）

摘　要：对于任意的正整数 n，著名的Smarandache LCM函数的对偶函数定义为 $SL^*(n) = \mathrm{BZ}\{k \mid k \in N_+, [1,2,\cdots,k] \mid n\}$，$\Omega(n)$ 表示 n 的所有素因子的个数. 文章利用初等数论和分类讨论的方法研究函数方程 $\sum_{d\mid n} \frac{1}{SL^*(n)} = 2\Omega(n)$ 的可解性，并给出了这个方程的所有正整数解的具体形式.

关键词：Smarandache LCM 对偶函数；初等方法；方程；正整数解

中图分类号：O156.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1009-5128(2013)09-0014-05

收稿日期：2013-05-29

基金项目：陕西省教育厅专项科研计划项目(11JK0470)；陕西省自然科学基金项目(2012JM1021)；渭南师范学院科研计划项目(13YKP014)

作者简介：赵娜娜(1989—)，女，陕西渭南人，西北大学数学系硕士研究生，主要从事数论研究.

1　引言及结论

对任意的正整数 n，Smarandache LCM 函数[1] 的定义为 $SL^*(n) = \mathrm{BZ}\{k \mid k \in N_+, n \mid [1,2,\cdots,k]\}$，这里 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数，N_+ 表示所有正整数的集合，其对偶函数定义为 $SL^*(n) = \mathrm{BZ}\{k \mid k \in N_+, [1,2,\cdots,k] \mid n\}$，由定义很容易计算 $SL^*(n)$ 的前几个值：$SL^*(1) = 1$，$SL^*(2) = 2$，$SL^*(3) = 1$，$SL^*(4) = 2$，$SL^*(5) = 1$，$SL^*(6) = 3$，$SL^*(7) = 1$，$SL^*(8) = 2$，$SL^*(9) = 1$，$SL^*(10) = 2\cdots$

Smarandache LCM 函数的对偶函数有很好的性质：当 n 为奇数时，$SL^*(n) = 1$，当 n 为偶数时，$SL^*(n) \geqslant 2$. 关于它的性质及函数方程有许多学者进行过研究，获得了不少有趣的结果.

田呈亮在文献[2]中研究了函数方程 $\sum_{d\mid n} SL^*(d) = n$ 和 $\sum_{d\mid n} SL^*(d) = \Phi(n)$ 的可解性，得出前者只有唯一的正整数解 $n = 1$，而后者的正整数解为 $n = 1,3,14$. 另外，王妤在文献[3]中研究了方程 $\sum_{d\mid n} SL^*(d) = \sum_{d\mid n} S^*(d)$，并得出其正整数解. 吴欣在文献[4]中研究了方程 $SL^*(n) = Z^*(n)$ 的正整数解. 陈斌在文献[5]和[6]中研究了方程 $\sum_{d\mid n} SL^*(d) + 1 = 2^{\omega(n)}$ 和 $\sum_{d\mid n} \frac{1}{S^*(d)} = 2\Omega(n)$ 的正整数解(其中 $S^*(n) = \mathrm{BZ}\{m \mid m \in N_+, m! \mid n\}$)，前者有解当且仅当 $n = p^\alpha$，$\alpha \geqslant 1$，$p \geqslant 3$ 为素数；后者也有正整数解：n 为奇数时，$n = p$，$n = p^\alpha q$，其中 $\alpha \geqslant 1$，p,q 为素数；n 为偶数时，$n = 2^4 3^{30}$，$n = 2^6 3^{12}$，$n = 8p^7$，$n = 16p^5$，$n = 64p^4$，$n = 2pq$，其中 $p,q \geqslant 5$ 为奇素数.

本文的主要目的是利用初等数论和分类讨论的方法研究函数方程

$$\sum_{d\mid n} \frac{1}{SL^*(d)} = 2\Omega(n) \tag{1}$$

的正整数解，并得到了其所有的正整数解，其中 $\Omega(n)$ 为 n 的所有素因子个数和(包括重数)，即若 n 的素因子分解为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，则 $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$，本文即证得下面的定理

定理 1　(1) 方程(1)的奇数解为：$n = p$，$n = p^\alpha q$，其中 $\alpha \geqslant 1$，p,q 为奇素数；

(2) 所有偶数解的具体形式为：$n = 2pq$，$n = 2048p^4$，$n = 32p^7$，$n = 16p^{11}$，$n = 128p^5$，$n = 4p^3 q$，$n = 8pq^2$，

其中 $p,q \geqslant 5$ 的素数；$n=2^6 3^{34}$，$n=2^7 3^{20}$，$n=2^9 3^{13}$，$n=2^{12} 3^{10}$，$n=2^{19} 3^8$，$n=2^{33} 3^7$，$n=6480$；$n=mp(m=36$，$648,864,2916)$，$n=24p^3$，其中 $p \geqslant 5$ 的素数.

2　定理的证明

证明　当 $n=1$ 时，$\sum_{d|n} \frac{1}{SL^*(d)}=1$，$2\Omega(n)=0$，显然 $n=1$ 不是方程(1)的解，下设 $n>1$. 具体分下面两种情况：

情况Ⅰ　当 $n>1$ 且为奇数时，设 $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，此时显然对 n 的每一个因子 d 必为奇数，即 2 不整除 d，故 $SL^*(d)=S^*(d)=1$，而 $2\Omega(n)=2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)$，故原方程可转化为

$$\sum_{d|n} \frac{1}{SL^*(d)}=\sum_{d|n} \frac{1}{S^*(d)}=2\Omega(n),$$

由文献[6]知，当 n 为奇数时，方程(1)的奇数解为 $n=p$，$n=p^{\alpha} q$，其中 $\alpha \geqslant 1$，p,q 为奇素数.

情况Ⅱ　当 n 为偶数时，设 $n=2^{\alpha} m$，$m=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，$\alpha \geqslant 1$，$p_1<p_2<\cdots<p_k$，下分 $m=1$ 和 $m>1$ 两种情况讨论.

(Ⅰ)若 $m=1$ 时，$n=2^{\alpha}$，$2\Omega(n)=2\alpha$，同时 $\sum_{d|n} \frac{1}{SL^*(d)}=1+\sum_{d|2^{\alpha},d>1} \frac{1}{SL^*(d)}=1+\frac{\alpha}{2}$，故原方程等价于 $1+\frac{\alpha}{2}=2\alpha$，解得 $\alpha=\frac{2}{3}$，故 $n=2^{\alpha}$ 不是方程(1)的解.

(Ⅱ)当 $m>1$ 时，分 $\alpha=1$ 和 $\alpha>1$ 两种情况，具体分析如下：

(A)当 $\alpha=1$ 时，即 $n=2m$，$m=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，$k \geqslant 1$，由于 $3 \mid m$ 与 3 不整除 m 时 $SL^*(n)$ 的值不同，故分下面两种情况：

(1)当 $3 \mid m$ 时，$n=2 \cdot 3^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

(i)当 $k=1$ 时，$n=2 \cdot 3^{\alpha_1}$，此时 $2\Omega(n)=2(1+\alpha_1)$，有

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \frac{1}{SL^*(d)}&=\sum_{d|2\cdot 3^{\alpha_1}} \frac{1}{SL^*(d)}\\&=1+\frac{1}{SL^*(2)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{1}{SL^*(3^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{1}{SL^*(2\cdot 3^i)}\\&=\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1,\end{aligned}$$

则原方程等价于 $2(1+\alpha_1)=\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1$，显然此时 $2(1+\alpha_1)>\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1$，故此时方程(1)无正整数解.

(ii)当 $k=2$ 时，$n=2 \cdot 3^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$，此时 $2\Omega(n)=2(1+\alpha_1+\alpha_2)$，有

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \frac{1}{SL^*(d)}&=\sum_{d|2\cdot 3^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}} \frac{1}{SL^*(d)}\\&=1+\frac{1}{SL^*(2)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{1}{SL^*(3^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{1}{SL^*(2\cdot 3^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_2} \frac{1}{SL^*(p_2^i)}+\\&\quad\sum_{i=1}^{\alpha_2} \frac{1}{SL^*(2\cdot p_2^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\sum_{j=1}^{\alpha_2} \frac{1}{SL^*(3^i\cdot p_2^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\sum_{j=1}^{\alpha_2} \frac{1}{SL^*(2\cdot 3^i p_2^j)}\\&=\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1\right)(1+\alpha_2),\end{aligned}$$

此时原方程转化为 $2(1+\alpha_1+\alpha_2)=\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1\right)(1+\alpha_2)$，很容易计算此不定方程无正整数解.

(iii)当 $k \geqslant 3$ 时，$n=2 \cdot 3^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，此时 $2\Omega(n)=2(1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)$，有

$$\sum_{d|n} \frac{1}{SL^*(d)}=\sum_{d|2\cdot 3^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}} \frac{1}{SL^*(d)}=\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1\right)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\cdots(1+\alpha_k),$$

用数学归纳法容易证得

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1\right)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\cdots(1+\alpha_k) > 2(1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k),$$

故此时方程(1)无正整数解.

(2)当 3 不整除 m 时,$n=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,$5\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_k$,由于

$$2\Omega(n)=2(1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k),$$

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL^*(d)}=\frac{3}{2}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k),$$

即原方程可转化为

$$\frac{3}{2}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)=2(1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k), \qquad (2)$$

则不定方程(2)的解即为方程(1)的正整数解,下面解不定方程(2).

(i)当 $k=1$ 时,(2)式为 $\frac{3}{2}(1+\alpha_1)=2(1+\alpha_1)$,解得 $\alpha_1=-1$(矛盾).

(ii)当 $k=2$ 时,(2)式为 $\frac{3}{2}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)=2(1+\alpha_1+\alpha_2)$,化简为 $3\alpha_1\alpha_2=1+\alpha_1+\alpha_2$,解得 $\alpha_1=\alpha_2=1$,故 $n=2p_1p_2$ 是方程(1)的正整数解.

(iii)当 $k\geqslant 3$ 时,用数学归纳法证得对 $\alpha_1\geqslant 1,\alpha_2\geqslant 1,\cdots,\alpha_k\geqslant 1$,都有

$$\frac{3}{2}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k) > 2(1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k),$$

故此时方程(1)无正整数解.

(B)当 $\alpha\geqslant 2$ 时,$n=2^{\alpha}m=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,$3\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_k$.

(Ⅰ)当 $3|m$ 时,分情况讨论如下:

(i)当 $k=1$ 时,$n=2^{\alpha}3^{\alpha_1}$,此时 $2\Omega(n)=2(\alpha+\alpha_1)$,

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL^*(d)}=\sum_{d|2^{\alpha}3^{\alpha_1}}\frac{1}{SL^*(d)}$$

$$=1+\sum_{i=2}^{\alpha}\frac{1}{SL^*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL^*(3^i)}+\sum_{i=2}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL^*(2^i3^j)}$$

$$=1+\frac{\alpha-1}{2}+\alpha_1+\frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4}.$$

故原方程可转化为 $1+\frac{\alpha-1}{2}+\alpha_1+\frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4}=2(\alpha+\alpha_1)$,等价于不定方程 $\alpha_1=6+\frac{28}{\alpha-5}$. 解不定方程得正整数解为 $\alpha=6,\alpha_1=34$ 或 $\alpha=7,\alpha_1=20$ 或 $\alpha=9,\alpha_1=13$ 或 $\alpha=12,\alpha_1=10$ 或 $\alpha=19,\alpha_1=8$ 或 $\alpha=33,\alpha_1=7$,故此时方程(1)的解为:$n=2^6 3^{34}$,$n=2^7 3^{20}$,$n=2^9 3^{13}$,$n=2^{12}3^{10}$,$n=2^{19}3^8$,$n=2^{33}3^7$.

(ii)当 $k=2$ 时,$n=2^{\alpha}3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,$p_2\geqslant 5$,此时,$2\Omega(n)=2(\alpha+\alpha_1+\alpha_2)$,下分($a$)和($b$)两种情况:

(a)当 $p_2=5$ 时,即 $n=2^{\alpha}3^{\alpha_1}5^{\alpha_2}$,

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL^*(d)}=\sum_{d|2^{\alpha}3^{\alpha_1}5^{\alpha_2}}\frac{1}{SL^*(d)}$$

$$=1+\frac{\alpha-1}{2}+\alpha_1+\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4}+\frac{(\alpha-1)\alpha_2}{2}+\alpha_1\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1\alpha_2}{6},$$

则原方程转化为

$$1+\frac{\alpha-1}{2}+\alpha_1+\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4}+\frac{(\alpha-1)\alpha_2}{2}+\alpha_1\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1\alpha_2}{6}=2(\alpha+\alpha_1+\alpha_2). \qquad (3)$$

下解方程(3).

① 当 $\alpha=2$ 时,(3)式等价于 $14\alpha_1\alpha_2=30+9\alpha_1+6\alpha_2$,此时方程无正整数解.

② 当 $\alpha = 3$ 时，(3) 式等价于 $8\alpha_1\alpha_2 = 24 + 3\alpha_1$，此时方程无正整数解.

③ 当 $\alpha = 4$ 时，(3) 式等价于 $2\alpha_2 + 6\alpha_1\alpha_2 = 22 + \alpha_1$，此时方程仅有一组正整数解为 $\alpha_1 = 4$，$\alpha_2 = 1$，故 $n = 2^4 3^4 5 = 6480$ 为方程(1) 的正整数解.

④ 当 $\alpha \geqslant 5$ 时，(3) 式无正整数解.

(b) 当 $p_2 > 5$ 时，即 $n = 2^\alpha 3^{\alpha_1} p_2{}^{\alpha_2}$，

$$\sum_{d|n} \frac{1}{SL^*(d)} = \sum_{d|2^\alpha 3^{\alpha_1} p_2{}^{\alpha_2}} \frac{1}{SL^*(d)}$$
$$= 1 + \frac{\alpha-1}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4} + \frac{(\alpha-1)\alpha_2}{2} + \alpha_1\alpha_2 + \frac{(\alpha-1)\alpha_1\alpha_2}{4}.$$

则原方程转化为

$$1 + \frac{\alpha-1}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4} + \frac{(\alpha-1)\alpha_2}{2} + \alpha_1\alpha_2 + \frac{(\alpha-1)\alpha_1\alpha_2}{4} = 2(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2). \qquad (4)$$

① 当 $\alpha = 2$ 时，(4) 式等价于 $5\alpha_1\alpha_2 = 10 + 3\alpha_1 + 2\alpha_2$，此时解得方程的正整数解为 $\alpha_1 = 6$，$\alpha_2 = 1$ 或 $\alpha_1 = 2$，$\alpha_2 = 2$，故方程(1) 有解当且仅当 $n = 36p$，$n = 2916p(p > 5)$.

② 当 $\alpha = 3$ 时，(4) 式等价于 $3\alpha_1\alpha_2 = 8 + \alpha_1$，此时解得方程的正整数解为 $\alpha_1 = 4$，$\alpha_2 = 1$ 或 $\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = 3$，故方程(1) 有解当且仅当 $n = 648p$，$n = 24p^3(p > 5)$.

③ 当 $\alpha = 4$ 时，(4) 式等价于 $2\alpha_2 + 7\alpha_1\alpha_2 = 22 + \alpha_1$，此时方程无正整数解.

④ 当 $\alpha = 5$ 时，(4) 式等价于 $\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2 = 7$，此时解得方程的正整数解为 $\alpha_1 = 3$，$\alpha_2 = 1$，故方程(1) 有解当且仅当 $n = 2^5 3^3 p = 864p(p > 5)$.

⑤ 当 $\alpha \geqslant 6$ 时，(4) 式无正整数解.

(iii) 当 $k = 3$ 时，$n = 2^\alpha 3^{\alpha_1} p_2{}^{\alpha_2} p_3{}^{\alpha_3}$，$p_2 \geqslant 5$，此时，$2\Omega(n) = 2(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$，下分两种情况：

(a) 若 $p_2 = 5$，$p_3 = 7$，$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$，则 $n = 2^\alpha \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$，此时 $2\Omega(n) = 2\alpha + 6$，

$$\sum_{d|n} \frac{1}{SL^*(d)} = \sum_{d|2^\alpha \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{1}{SL^*(d)} = 6 + 2\alpha + \frac{2}{3}(\alpha - 1) + \frac{\alpha-2}{8} + \frac{1}{7}.$$

此时显然 $\sum\limits_{d|2^\alpha \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{1}{SL^*((d)} > 2\Omega(2^\alpha \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$，

故此时方程(1) 无正整数解.

同理，当 $\alpha_1 > 1$，$\alpha_2 > 1$，$\alpha_3 > 1$ 时，方程(1) 也无正整数解.

(b) 若 $p_2 \neq 5$，$5 < p_2 < p_3$，$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$，则 $n = 2^\alpha \cdot 3 \cdot p_2 \cdot p_3$，此时 $2\Omega(n) = 2\alpha + 6$，

$$\sum_{d|n} \frac{1}{SL^*(d)} = \sum_{d|2^\alpha \cdot 3 \cdot p_2 \cdot p_3} \frac{1}{SL^*(d)} = 3\alpha + 5,$$

显然 $\sum\limits_{d|2^\alpha \cdot 3 \cdot p_2 \cdot p_3} \frac{1}{SL^*(d)} > 2\Omega(2^\alpha \cdot 3 \cdot p_2 \cdot p_3)$，

故此时方程(1) 也无正整数解.

同理，当 $\alpha_1 > 1$，$\alpha_2 > 1$，$\alpha_3 > 1$，方程(1) 也无正整数解.

(iv) 当 $k \geqslant 4$ 时，$n = 2^\alpha 3^{\alpha_1} p_2{}^{\alpha_2} \cdots p_k{}^{\alpha_k}$，方程(1) 也无正整数解.

(2) 当 3 不整除 m 时，$n = 2^\alpha m = 2^\alpha p_1{}^{\alpha_1} p_2{}^{\alpha_2} \cdots p_k{}^{\alpha_k}$，$2\Omega(n) = 2(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)$，

$$\sum_{d|n} \frac{1}{SL^*(d)} = \frac{1}{2}(1+\alpha)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k).$$

原方程转化为

$$(1+\alpha)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k) = 4(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k). \qquad (5)$$

(i) 当 $k = 1$ 时，(5) 式为 $(1+\alpha)(1+\alpha_1) = 4(\alpha + \alpha_1)$，等价于 $\alpha = 3 + \frac{8}{\alpha_1 - 3}$，解得此不定方程的正整数解为 $\alpha = 11$，$\alpha_1 = 4$ 或 $\alpha = 4$，$\alpha_1 = 11$ 或 $\alpha = 7$，$\alpha_1 = 5$ 或 $\alpha = 5$，$\alpha_1 = 7$，故此时方程(1) 有解当且仅当 $n = 2048p^4$，$n = 16p^{11}$，$n = 32p^7$，$n = 128p^5$.

(ii) 当 $k = 2$ 时,(5) 式变为

$$(1 + \alpha)(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) = 4(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2). \quad (6)$$

下解方程(6).

(a) 当 $\alpha = 2$ 时,(6) 式等价于 $3\alpha_1\alpha_2 = 5 + \alpha_1 + \alpha_2$,解得方程的正整数解为 $\alpha_1 = 3$,$\alpha_2 = 1$ 或 $\alpha_1 = 1$,$\alpha_2 = 3$,故方程(1) 有解当且仅当 $n = 4p_1p_2^3(p_1, p_2 > 3)$.

(b) 当 $\alpha = 3$ 时,(6) 式等价于 $\alpha_1\alpha_2 = 2$,解得方程的正整数解为 $\alpha_1 = 1$,$\alpha_2 = 2$ 或 $\alpha_1 = 2$,$\alpha_2 = 1$,故方程(1) 有解当且仅当 $n = 8p_1p_2^2(p_1, p_2 > 3)$.

(c) 当 $\alpha \geqslant 4$ 时,(6) 式无正整数解.

(iii) 当 $k \geqslant 3$ 时,$(1 + \alpha)(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\cdots(1 + \alpha_k) > 4(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)$,下面用数学归纳法证明:

(a) 当 $k = 3$ 时,显然 $(1 + \alpha)(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3) > 4(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.

(b) 当 $k = m$ 时,假设 $(1 + \alpha)(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\cdots(1 + \alpha_m) > 4(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)$.

(c) 当 $k = m + 1$ 时,有

$$(1 + \alpha)(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\cdots(1 + \alpha_m)(1 + \alpha_{m+1}) > 4(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)(1 + \alpha_{m+1})$$
$$= 4(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m) + 4\alpha_{m+1}(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)$$
$$> 4(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m + \alpha_{m+1})$$

故此时方程(1) 无正整数解.

综合上述情况 I 和情况 II 的讨论,定理得证.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publ. House, 1993.
[2] Tian chengliang. An equations involving the two Smarandache LCM dual function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(3): 104-107.
[3] 王妤. 一个包含 Smarandache LCM 对偶函数的方程 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2008, 25(5): 645-647.
[4] 吴欣. 关于伪 Smarandache 对偶函数的一个方程 [J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2010, 39(6): 557-559.
[5] 陈斌. 关于 Smarandache LCM 函数对偶函数的方程 [J]. 渭南师范学院学报, 2012, 27(2): 21-22.
[6] 陈斌. 包含 Smarandache 对偶函数的方程的正整数解 [J]. 天津师范大学学报(自然科学版), 2012, 32(3): 6-8.

【责任编辑 牛怀岗】

The Solvability of the Equation Involving the Smarandache Dual LCM Function

ZHAO Na-na, CHEN Bin
(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: For any positive integer n, the well-known Smarandache dual LCM function is defined by $SL^*(n) = \max\{k \mid k \in N_+, [1, 2, \cdots, k] \mid n\}$, and $\Omega(n)$ is all the number of prime factors of n. In this paper, the elementary number theory and classification discussion methods are used to study the solvability of the equation $\sum_{d \mid n} \frac{1}{SL^*(n)} = 2\Omega(n)$, and its all specific forms of positive integer solutions are given.

Key words: Smarandache dual LCM function; elementary method; equation; positive integer solutions